

Marek Trojanowicz

**METODA INTEGRACJI KLASYCZNYCH I SATELITARNYCH
POMIARÓW GEODEZYJNYCH***

**A METHOD OF INTEGRATION OF THE CLASSICAL
GEODETIC AND GPS DATA**

*Katedra Geodezji i Fotogrametrii
Department of Geodesy and Photogrammetry*

Celem rozprawy jest opracowanie metody łącznego wyrównania danych GPS z wynikami klasycznych pomiarów geodezyjnych w postaci danych tachymetrycznych, niwelacyjnych, grawimetrycznych i gradiometrycznych. Dane te (z wyjątkiem odległości przestrzennych i składowych wektorów GPS) są silnie zdeterminowane w polu grawitacyjnym Ziemi. Zatem wynik ich integracji zależy od poprawnego rozpoznania lokalnego pola ciężkościowego. W tym względzie przyjęty został syntetyczny model potencjału. Potencjał kuli o jednorodnej gęstości poprawiany jest ze względu na wpływ ruchu obrotowego Ziemi, wpływ mas topograficznych zalegających ponad geoidą (wyznaczany na podstawie numerycznego modelu terenu) i wpływ mas zakłócających znajdujących się we wnętrzu Ziemi (wyznaczany na podstawie znanych anomalii grawimetrycznych). Pozostałe zakłócenia modelowane są przy założeniu wielomianów harmonicznych, w procesie wyrównania sieci. W oparciu o zaproponowany model potencjału wyprowadzone zostały równania obserwacyjne dla poszczególnych rodzajów pomiarów.

SŁOWA KLUCZOWE: geodezyjna sieć przestrzenna, lokalne pole grawitacyjne, pomiary kontrolne

* Skrół pracy doktorskiej;

Promotor: dr hab. inż. Edward Osada prof. nadzw., AR Wrocław,

Recenzenci: prof. dr hab. Ewa Krzywicka-Blum, AR Wrocław,

prof. dr hab. Lubomir W. Baran, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski, Olsztyn.

1. WSTĘP

Stosowana powszechnie technika pomiarów GPS znacznie powiększyła zakres możliwości pomiarowych w geodezji zarówno pod względem ich jakości, jak i wydajności. Nie wyeliminowała jednak, a uzupełniła stosowane dotychczas, klasyczne metody i techniki pomiarowe, takie jak: tachymetria elektroniczna, niwelacja, pomiary grawimetryczne i gradiometryczne. Stosowana, szczególnie w rozwiązaniach sieci lokalnych, kombinacja klasycznych i satelitarnych pomiarów geodezyjnych, wymaga więc określenia metod łącznego opracowania wyników tych pomiarów.

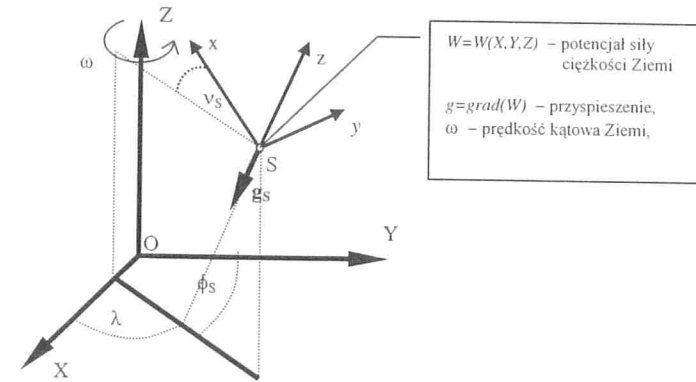
2. KONCEPCJA INTEGRACJI OBSERWACJI GEODEZYJNYCH

Na każdym stanowisku pomiaru tachymetrycznego oś obrotu tachymetru pokrywa się, z dokładnością poziomowania instrumentu, z kierunkiem siły ciężkości Ziemi. Wynik pomiaru tachymetrycznego, jak również wynik jego integracji z pomiarami GPS, z ewentualnym dołączeniem dostępnych danych niwelacyjnych, grawimetrycznych i gradiometrycznych uzależniony jest od poprawnego rozpoznania lokalnego pola siły ciężkości Ziemi.

W tym względzie w niniejszej pracy zaproponowany jest *symetryczny model lokalnego pola ciężkościowego*: wyjściowy *model Ziemi kulistej* poprawiany jest ze względu na wpływ ruchu obrotowego Ziemi – tak zwana *poprawka rotacyjna Ziemi*, wpływ mas topograficznych – tak zwana *poprawka topograficzna* i wpływ niejednorodnego rozkładu gęstości mas Ziemi – tak zwana *poprawka grawimetryczna*. Potencjał zakłócający wywołany wpływem innych czynników modelowany jest w procesie wyrównania obserwacji tachymetrycznych i satelitarnych GPS z ewentualnym dołączeniem dodatkowych dostępnych danych niwelacyjnych, grawimetrycznych i gradiometrycznych. Jako model analityczny potencjału zakłócającego przyjęta jest pewna kombinacja liniowa sferycznych wielomianów harmonicznych (Osada, Trojanowicz, Malańczuk 1997).

Ze względu na lokalny charakter problemu integracji, wszystkie obliczenia przeprowadzone będą w horyzontalnym układzie odniesienia x, y, z . Początek układu zaczepiony zostanie w jednym z punktów sieci, który jest stanowiskiem tachymetru S . Oś z skierowana na zenit pokrywa się z osią obrotu instrumentu. Oś x, y leżą w płaszczyźnie horyzontu. Oś x pokrywa się z kierunkiem zera limbasa i skierowana jest w przybliżeniu na północ, natomiast oś y jest prostopadła do x i skierowana na wschód (rys. 2.1).

Przyjmijmy również następującą definicję odchylenia pionu: odchyleniem pionu w danym punkcie sieci będziemy nazywać kąt, jaki tworzą kierunek pionu w tym punkcie z kierunkiem pionu w punkcie początkowym sieci (punkcie zaczepienia układu współrzędnych).



Rys. 2.1. Horyzontalny układ odniesienia sieci x, y, z oraz parametry jego orientacji względem układu równikowego GPS (X, Y, Z) : ϕ_S -szerokość geograficzna, λ_S -długość geograficzna, v_S -azymut osi x ($v_S \neq 0$)

Fig. 2.1. External orientation of the local reference frame: ϕ_S -latitude, λ_S -longitude, v_S -azimuth

3. POMIARY TACHYMETRYCZNE

3.1. Koncepcja modelowania rozkładu pionu

Z dokładnością do błędu poziomowania tachymetru można przyjąć, że pionowa oś obrotu instrumentu pokrywa się z kierunkiem przyspieszenia siły ciężkości Ziemi $g = \text{grad } W$, gdzie:

$$W = G \int_{Ziemia} \frac{dm}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 \quad (3.1.1)$$

jest potencjałem siły ciężkości Ziemi, przy czym: $G = 6,637 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ oznacza stałą grawitacji, dm jest elementem masy Ziemi w odległości r od punktu wyznaczenia potencjału W , $\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \text{ rad}$ jest prędkością kątową Ziemi oraz ρ jest odległością punktu wyznaczenia potencjału W od osi obrotu Ziemi Z .

Zatem, składowe odchylenia pionu (ξ, η) na stanowisku aktualnym C , mogą być obliczone jako kąty kierunkowe wektora przyspieszenia siły ciężkości

$$\mathbf{g} = \text{grad } W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) = (g_x, g_y, g_z) \quad (3.1.2)$$

w układzie odniesienia sieci (S, x, y, z) (patrz rysunek 3.1.1) jako:

$$\xi = \arctg \frac{g_x}{g_z} \cong -\frac{g_x}{g} \quad (3.1.3a)$$

$$\eta = \arctg \frac{g_y}{g_z} \cong -\frac{g_y}{g} \quad (3.1.3b)$$

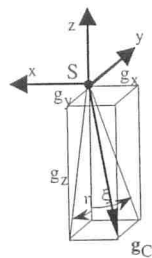
gdzie:
$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (3.1.4)$$

Ze względu na małe wielkości składowych odchylenia pionu, wartość przyspieszenia g we wzorze (3.1.3) przyjęta jest jako stała, równa wartości średniej na rozpatrywanym obszarze.

Potencjał siły ciężkości Ziemi (3.1.1) można przedstawić w postaci sumy potencjału newtonowskiego pewnego modelu Ziemi W_r , potencjału siły odśrodkowej W_ω , potencjału mas topograficznych W , oraz potencjału mas zakłócających Ziemi $W_{\Delta g}$:

$$W = W_r + W_\omega + W + W_{\Delta g} + T \quad (3.1.5)$$

gdzie T jest błędem modelu.



Rys. 3.1.1. Składowe odchylenia pionu
Fig. 3.1.1. Vertical deflection components

Jako główny składnik W_r przyjmujemy w dalszych obliczeniach potencjał Ziemi kulistej o jednorodnym rozkładzie gęstości mas, natomiast błąd modelu – inaczej potencjał zakłócający T , przedstawimy w postaci liniowej kombinacji:

$$T(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \mathbf{a} = \sum_{k=1}^m f_k(x, y, z) a_k \quad (3.1.6)$$

– wielomianów harmonicznych.

Z definicji lokalnego układu odniesienia oraz odchylenia pionu wynika, że w punkcie S składowe odchylenia pionu powinny być zerowe. Wymaga to poprawienia obliczonych wzorami (3.1.3) składowych odchyleń pionu o składowe wyznaczone w punkcie początkowym sieci S . Otrzymamy więc:

$$\xi = \xi(C) - \xi(S) \quad (3.1.7a)$$

$$\eta = \eta(C) - \eta(S) \quad (3.1.7b)$$

W wyniku dekompozycji potencjału (3.1.5) wyróżnimy cztery składniki odchylenia pionu (3.1.7):

$$\xi = \xi_r + \xi_\omega + \xi_t + \xi_{\Delta g} + d\xi \quad (3.1.8a)$$

$$\eta = \eta_r + \eta_\omega + \eta_t + \eta_{\Delta g} + d\eta \quad (3.1.8b)$$

gdzie:

(ξ_r, η_r) – pion Ziemi kulistej,

$(\xi_\omega, \eta_\omega)$ – poprawka rotacyjna Ziemi,

(ξ_t, η_t) – poprawka topograficzna,

$(\xi_{\Delta g}, \eta_{\Delta g})$ – poprawka grawimetryczna,

oraz przy uwzględnieniu (3.1.6) zakłócenie $(d\xi, d\eta)$:

$$d\xi(C) = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(C) - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(S) \right) \mathbf{a} \quad (3.1.9a)$$

$$d\eta(C) = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}(C) - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}(S) \right) \mathbf{a} \quad (3.1.9b)$$

– modelowane (nieznany wektor \mathbf{a}) w procesie wyrównania obserwacji.

3.2. Pierwsze przybliżenie – pion Ziemi kulistej

Przy założeniu $\omega = 0$ potencjał siły ciężkości określony wzorem (3.1.1), dla Ziemi kulistej sprowadza się do postaci:

$$W_r = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + (R + H_S + z)^2}} \quad (3.2.1)$$

gdzie M jest masą Ziemi oraz $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (R + H_S + z)^2}$ jest odległością punktu sieci o współrzędnych x, y, z od środka kuli, x, y, z są współrzędnymi w układzie lokalnym.

Po podstawieniu pochodnych wzoru (3.2.1) względem zmiennych x, y, z do (3.1.3) otrzymuje się składowe sferyczne odchylenia pionu w postaci:

$$\xi_r = \text{arc tg} \frac{x_c}{R + z_c + H_S} \quad (3.2.2a)$$

$$\eta_r = \text{arc tg} \frac{y_c}{R + z_c + H_S} \quad (3.2.2b)$$

3.3. Poprawka rotacyjna Ziemi

Potencjał siły odśrodkowej (3.1.1):

$$W_\omega = \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) \quad (3.3.1)$$

po dokonaniu zamiany współrzędnych równikowych X, Y, Z na lokalne x, y, z przyjmuje postać:

$$W_\omega(x, y, z) = \frac{\omega^2}{2} ((X_S - x \sin \phi_S \cos \lambda_S - y \sin \lambda_S + z \cos \phi_S \cos \lambda_S)^2 + (Y_S - x \sin \phi_S \sin \lambda_S + y \cos \lambda_S + z \cos \phi_S \sin \lambda_S)^2) \quad (3.3.2)$$

Na podstawie (3.1.3), (3.3.2) i (3.1.7), składowe poprawki rotacyjnej odchylenia pionu dane są wzorami:

$$\begin{aligned} \xi_\omega(x, y, z) &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial W_\omega}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial W_\omega}{\partial x}(0, 0, 0) \right) \\ &= \frac{\omega^2}{g} [(x \sin \phi_S \cos \lambda_S + y \sin \lambda_S - z \cos \phi_S \cos \lambda_S) \sin \phi_S \cos \lambda_S \\ &\quad - (-x \sin \phi_S \sin \lambda_S + y \cos \lambda_S + z \cos \phi_S \sin \lambda_S) \sin \phi_S \sin \lambda_S] \end{aligned} \quad (3.3.3a)$$

$$\begin{aligned} \eta_\omega(x, y, z) &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial W_\omega}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial W_\omega}{\partial y}(0, 0, 0) \right) \\ &= \frac{\omega^2}{g} [(x \sin \phi_S \cos \lambda_S + y \sin \lambda_S - z \cos \phi_S \cos \lambda_S) \sin \lambda_S \\ &\quad + (-x \sin \phi_S \sin \lambda_S + y \cos \lambda_S + z \cos \phi_S \sin \lambda_S) \cos \lambda_S] \end{aligned} \quad (3.3.3b)$$

3.4. Poprawka topograficzna

Masy topograficzne wokół stanowiska tachymetru powodują zakłócenie sferycznego modelu pionu.

Część potencjału siły ciężkości Ziemi (3.1.1) odnosząca się do mas topograficznych ponad powierzchnią poziomą przechodzącą przez najniższy położony punkt na obszarze kilkakrotnie większym od obszaru obejmującego pomiar tachymetryczny i GPS, w ogólności ponad geoidą, oznaczona jest w rozkładzie (3.1.5) symbolem W_i :

$$W_i(C) = G \int \frac{dm}{r} \quad (3.4.1)$$

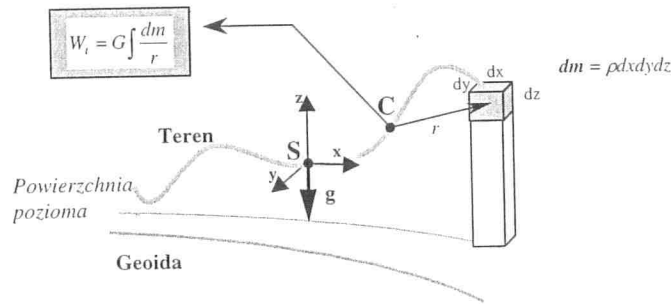
gdzie $dm = \rho dx dy dz$ jest elementem masy o gęstości ρ i objętości $dx dy dz$, w odległości r od punktu wyznaczenia potencjału C , w układzie odniesienia (S, x, y, z) , (rys. 3.4.1).

Na podstawie (3.1.3), (3.1.7) i (3.4.1) poprawka topograficzna odchylenia pionu dana jest wzorami:

$$\xi_i = \frac{G}{g} \int \rho \left(\frac{\Delta x_{SP}}{r_{SP}^3} - \frac{\Delta x_{CP}}{r_{CP}^3} \right) dx dy dz \quad (3.4.2a)$$

$$\eta_i = \frac{G}{g} \int \rho \left(\frac{\Delta y_{SP}}{r_{SP}^3} - \frac{\Delta y_{CP}}{r_{CP}^3} \right) dx dy dz \quad (3.4.2b)$$

gdzie $\Delta x_{SP}, \Delta y_{SP}, r_{SP}$ i $\Delta x_{CP}, \Delta y_{CP}, r_{CP}$ są przyrostami współrzędnych i odległością od punktów S i C do bieżącego segmentu mas topograficznych P , o gęstości ρ i objętości $dx dy dz$.



Rys. 3.4.1. Potencjał mas topograficznych.
Fig. 3.4.1. Topographical masses potential

Praktyczne obliczenie poprawki topograficznej (3.4.2) można zrealizować wykorzystując regularną *siatkę numerycznego modelu terenu* (NMT). Model ten dzieli masy topograficzne na prostopadłościennne bloki, wewnątrz których założymy stałą ich gęstość ρ . Wpływ pojedynczego bloku na składowe odchylenia pionu można obliczyć rozwiązując całkę (3.4.2) względem zmiennych x, y, z w granicach całkowania określonych przez współrzędne x_1, y_1, z_1 oraz x_2, y_2, z_2 ograniczające dany prostopadłościenny blok (Nagy 1966). Wzory (3.4.2) przyjmą wtedy postać:

$$\xi_r = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n [V_x(i,S) - V_x(i,C)] \quad (3.4.3a)$$

$$\eta_r = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n [V_y(i,S) - V_y(i,C)] \quad (3.4.3b)$$

gdzie funkcje V_x i V_y :

$$V_x(i,j) = G\rho_i \left\| \left\| (y_i - y_j) \ln |(z_i - z_j) + r| + (z_i - z_j) \ln |(y_i - y_j) + r| \right. \right. \quad (3.4.4a)$$

$$\left. - (x_i - x_j) \arctan \left[\frac{(y_i - y_j)(z_i - z_j)}{(x_i - x_j)r} \right] \right\|_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Big|_{y_{i1}}^{y_{i2}} \Big|_{z_{i1}}^{z_{i2}}$$

$$V_y(i,j) = G\rho_i \left\| \left\| (x_i - x_j) \ln |(z_i - z_j) + r| + (z_i - z_j) \ln |(x_i - x_j) + r| \right. \right. \quad (3.4.4b)$$

$$\left. - (y_i - y_j) \arctan \left[\frac{(x_i - x_j)(z_i - z_j)}{(y_i - y_j)r} \right] \right\|_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Big|_{y_{i1}}^{y_{i2}} \Big|_{z_{i1}}^{z_{i2}}$$

są pochodnymi potencjału prostopadłościennego bloku masy topograficznej w kierunkach x i y , n oznacza ilość bloków w siatce NMT, $j=S,C$ jest wskaźnikiem punktu, w którym poprawkę topograficzną wyznaczamy, $r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ oraz $|f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$.

3.5. Poprawka grawimetryczna

Z definicji przyspieszenia $g = -\frac{\partial W}{\partial H}$ – długości wektora przyspieszenia (3.1.2) i rozkładu potencjału (3.1.5) wynika, że *masy zakłócające Ziemi i jej otoczenia* (w tym atmosfera), wyrażone potencjałem zakłócającym W_{dg} , wywołują *mierzalną anomalie grawimetryczną*

$$\Delta g = -\frac{\partial W_{dg}}{\partial H} \quad (3.5.1)$$

określą równaniem

$$\Delta g = g - g_o \quad (3.5.2)$$

gdzie g jest pomierzoną wartością przyspieszenia, natomiast

$$g_o = g_r + g_\omega + g_t \quad (3.5.3)$$

jest wartością teoretyczną, obliczoną przy założeniu Ziemi kulistej:

$$g_r = -\frac{\partial W_r}{\partial H} \approx -\frac{\partial W_r}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \quad (3.5.4)$$

