ZESZYTY NAUKOWE AKADEMII ROLNICZEJ WE WROCŁAWIU
2000 GEODEZJA I URZĄDZENIA ROLNE XVI NR 379

Marek Trojanowicz

METODA INTEGRACJI KLASYCZNYCH I SATELITARNYCH POMIARÓW GEODEZYJNYCH*

A METHOD OF INTEGRATION OF THE CLASSICAL GEODETIC AND GPS DATA

Katedra Geodezji i Fotogrametrii
Department of Geodesy and Photogrammetry

Celem rozprawy jest opracowanie metody łącznego wyrównania danych GPS z wynikami klasycznych pomiarów geodezyjnych w postaci danych tachymetrycznych, niwelacyjnych, grawimetrycznych i gradiometrycznych. Dane te (z wyjątkiem odległości przestrzennych i składowych wektorów GPS) są silnie zdeterminowane w polu grawitacyjnym Ziemi. Zatem wynik ich integracji zależy od poprawnego rozpoznania lokalnego pola ciężkościowego. W tym względzie przyjęty został syntetyczny model potencjału. Potencjał kuli o jednorodnej gęstości poprawiany jest ze względu na wpływ ruchu obrotowego Ziemi, wpływ mas topograficznych zalegających ponad geoidą (wyznaczany na podstawie numerycznego modelu terenu) i wpływ mas zakłócających znajdujących się we wnętrzu Ziemi (wyznaczany na podstawie znanych anomalii grawimetrycznych). Pozostałe zakłócenia modelowane są przy założeniu wielomianów harmonicznych, w procesie wyrównania sieci. W oparciu o zaproponowany model potencjału wyprowadzone zostały równania obserwacyjne dla poszczególnych rodzajów pomiarów.

SŁOWA KLUCZOWE: geodezyjna sieć przestrzenna, lokalne pole grawitacyjne, pomiary kontrolne

---

*Skrót pracy doktorskiej:
Promotor: dr hab. inż. Edward Osada prof. nadzw., AR Wrocław.
Recenzenci: prof. dr hab. Ewa Krzywicka-Blum, AR Wrocław,
prof. dr hab. Lubomir W. Baran, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski, Olsztyn.

1. WSTĘP

Stosowana powszechnie technika pomiarów GPS znacznie powiększyła zakres możliwości pomiarowych w geodezji zarówno pod względem ich jakości, jak i wydajności. Nie wyeliminowała jednak, a uzupełniła stosowane dotychczas, klasyczne metody i techniki pomiarowe, takie jak: tachymetria elektroniczna, niwelacja, pomiary grawimetryczne i gradiometryczne. Stosowana, szczególnie w rozwiązaniach sieci lokalnych, kombinacja klasycznych i satelitarnych pomiarów geodezyjnych, wymaga więc określenia metod łącznego opracowania wyników tych pomiarów.

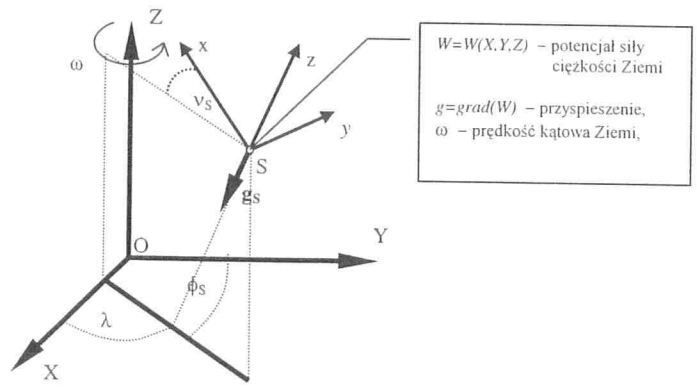
2. KONCEPCJA INTEGRACJI OBSERWACJI GEODEZYJNYCH

Na każdym stanowisku pomiaru tachymetrycznego oś obrotu tachymetru pokrywa się, z dokładnością poziomowania instrumentu, z kierunkiem siły ciężkości Ziemi. Wynik pomiaru tachymetrycznego, jak również wynik jego integracji z pomiarami GPS, z ewentualnym dołączeniem dostępnych danych niwelacyjnych, grawimetrycznych i gradiometrycznych uzależniony jest od poprawnego rozpoznania lokalnego pola siły ciężkości Ziemi.

W tym względzie w niniejszej pracy zaproponowany jest *syntetyczny model lokalnego pola ciężkościowego*: wyjściowy *model Ziemi kulistej* poprawiany jest ze względu na wpływ ruchu obrotowego Ziemi – tak zwana *poprawka rotacyjna Ziemi*, wpływ mas topograficznych – tak zwana *poprawka topograficzna* i wpływ niejednorodnego rozkładu gęstości mas Ziemi – tak zwana *poprawka grawimetryczna*. Potencjał zakłócający wywołany wpływem innych czynników modelowany jest w procesie wyrównania obserwacji tachimetrycznych i satelitarnych GPS z ewentualnym dołączeniem dodatkowych dostępnych danych niwelacyjnych, grawimetrycznych i gradiometrycznych. Jako model analityczny potencjału zakłócającego przyjęta jest pewna kombinacja liniowa sferycznych wielomianów harmonicznych (*Osada, Trojanowicz, Małańczuk 1997*).

Ze względu na lokalny charakter problemu integracji, wszystkie obliczenia przeprowadzone będą w horyzontalnym układzie odniesienia x,y,z. Początek układu zaczepiony zostanie w jednym z punktów sieci, który jest stanowiskiem tachymetru S. Oś z skierowana na zenit pokrywa się z osią obrotu instrumentu. Osie x,y leżą w płaszczyźnie horyzontu. Oś x pokrywa się z kierunkiem zera limbusa i skierowana jest w przybliżeniu na północ, natomiast oś y jest prostopadła do x i skierowana na wschód (rys. 2.1).

Przyjmiemy również następującą definicję odchylenia pionu: odchyleniem pionu w danym punkcie sieci będziemy nazywać kąt, jaki tworzą kierunek pionu w tym punkcie z kierunkiem pionu w punkcie początkowym sieci (punkcie zaczepienia układu współrzędnych).



Rys. 2.1. Horyzontalny układ odniesienia sieci x,y,z oraz parametry jego orientacji względem układu równikowego GPS (X,Y,Z): ϕ_S-szerokość geograficzna, λ_S-długość geograficzna, ν_S-azymut osi x ($\nu_S \equiv 0$)

Fig. 2.1. External orientation of the local reference frame: ϕ_S-latitude, λ_S-longitude, ν_S-azimuth

3. POMIARY TACHYMETRYCZNE

3.1. Koncepcja modelowania rozkładu pionu

Z dokładnością do błędu poziomowania tachymetru można przyjąć, że pionowa oś obrotu instrumentu pokrywa się z kierunkiem przyspieszenia siły ciężkości Ziemi $g = grad\ W$, *gdzie:*

$$W = G \int_{Ziemia} \frac{dm}{r} + \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 \tag{3.1.1}$$

jest potencjałem siły ciężkości Ziemi, przy czym: $G = 6{,}637 * 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ oznacza stałą grawitacji, dm jest elementem masy Ziemi w odległości r od punktu wyznaczenia potencjału W, $\omega = 7.292115 * 10^{-5} s^{-1} rad$ jest prędkością kątową Ziemi oraz ρ jest odległością punktu wyznaczenia potencjału W od osi obrotu Ziemi Z.

Zatem, składowe odchylenia pionu (ξ,η) na stanowisku aktualnym C, mogą być obliczone jako kąty kierunkowe wektora przyspieszenia siły ciężkości

$$\mathbf{g} = grad\, W = (\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}) = (g_x, g_y, g_z) \tag{3.1.2}$$

w układzie odniesienia sieci (S, x, y, z) (patrz rysunek 3.1.1) jako:

$$\xi = \mathrm{arctg}\frac{g_x}{g_z} \cong -\frac{g_x}{g} \tag{3.1.3a}$$

$$\eta = \mathrm{arctg}\frac{g_y}{g_z} \cong -\frac{g_y}{g} \tag{3.1.3b}$$

gdzie:

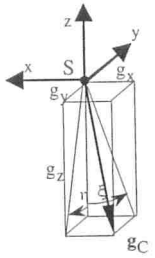
$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x},\ g_y = \frac{\partial W}{\partial y},\ g_z = \frac{\partial W}{\partial z} \tag{3.1.4}$$

Ze względu na małe wielkości składowych odchylenia pionu, wartość przyspieszenia g we wzorze (3.1.3) przyjęta jest jako stała, równa wartości średniej na rozpatrywanym obszarze.

Potencjał siły ciężkości Ziemi (3.1.1) można przedstawić w postaci sumy potencjału newtonowskiego pewnego modelu Ziemi W_r, potencjału siły odśrodkowej W_ω, potencjału mas topograficznych W_t oraz potencjału mas zakłócających Ziemi $W_{\Delta g}$:

$$W = W_r + W_\omega + W_t + W_{\Delta g} + T \tag{3.1.5}$$

gdzie T jest błędem modelu.



Rys. 3.1.1. Składowe odchylenia pionu
Fig. 3.1.1. Vertical deflection components

Jako główny składnik W_r przyjmiemy w dalszych obliczeniach potencjał Ziemi kulistej o jednorodnym rozkładzie gęstości mas, natomiast błąd modelu – inaczej potencjał zakłócający T, przedstawimy w postaci liniowej kombinacji:

$$T(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{m} f_k(x, y, z)a_k \tag{3.1.6}$$

– wielomianów harmonicznych.

Z definicji lokalnego układu odniesienia oraz odchylenia pionu wynika, że w punkcie S składowe odchylenia pionu powinny być zerowe. Wymaga to poprawienia obliczonych wzorami (3.1.3) składowych odchyleń pionu o składowe wyznaczone w punkcie początkowym sieci S. Otrzymamy więc:

$$\xi = \xi(C) - \xi(S) \tag{3.1.7a}$$

$$\eta = \eta(C) - \eta(S) \tag{3.1.7b}$$

W wyniku dekompozycji potencjału (3.1.5) wyróżnimy cztery składniki odchylenia pionu (3.1.7):

$$\xi = \xi_r + \xi_\omega + \xi_t + \xi_{\Delta g} + d\xi \tag{3.1.8a}$$

$$\eta = \eta_r + \eta_\omega + \eta_t + \eta_{\Delta g} + d\eta \tag{3.1.8b}$$

gdzie:

(ξ_r, η_r) – pion Ziemi kulistej,

$(\xi_\omega, \eta_\omega)$ – poprawka rotacyjna Ziemi,

(ξ_t, η_t) –poprawka topograficzna,

$(\xi_{\Delta g}, \eta_{\Delta g})$ – poprawka grawimetryczna,

oraz przy uwzględnieniu (3.1.6) zakłócenie $(d\xi, d\eta)$:

$$d\xi(C) = \frac{1}{g}(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(C) - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(S))\mathbf{a} \tag{3.1.9a}$$

$$d\eta(C) = \frac{1}{g}(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}(C) - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}(S))\mathbf{a} \tag{3.1.9b}$$

– modelowane (nieznany wektor **a**) w procesie wyrównania obserwacji.

3.2. Pierwsze przybliżenie – pion Ziemi kulistej

Przy założeniu $\omega = 0$ potencjał siły ciężkości określony wzorem (3.1.1), dla Ziemi kulistej sprowadza się do postaci:

$$W_r = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + (R + H_S + z)^2}} \tag{3.2.1}$$

gdzie M jest masą Ziemi oraz $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (R + H_S + z)^2}$ jest odległością punktu sieci o współrzędnych x,y,z od środka kuli, x, y, z są współrzędnymi w układzie lokalnym.

Po podstawieniu pochodnych wzoru (3.2.1) względem zmiennych x, y, z do (3.1.3) otrzymuje się składowe sferyczne odchylenia pionu w postaci:

$$\xi_r = arc\,\mathrm{tg}\frac{x_C}{R + z_C + H_S} \tag{3.2.2a}$$

$$\eta_r = arc\,\mathrm{tg}\frac{y_C}{R + z_C + H_S} \tag{3.2.2b}$$

3.3. Poprawka rotacyjna Ziemi

Potencjał siły odśrodkowej (3.1.1):

$$W_\omega = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 = \frac{1}{2}\omega^2(X^2 + Y^2) \tag{3.3.1}$$

po dokonaniu zamiany współrzędnych równikowych X, Y, Z na lokalne x, y, z przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} W_\omega(x, y, z) = \frac{\omega^2}{2}((&X_S - x\sin\phi_S\cos\lambda_S - y\sin\lambda_S + z\cos\phi_S\cos\lambda_S)^2 \\ &+ (Y_S - x\sin\phi_S\sin\lambda_S + y\cos\lambda_S + z\cos\phi_S\sin\lambda_S)^2) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Na podstawie (3.1.3), (3.3.2) i (3.1.7), składowe poprawki rotacyjnej odchylenia pionu dane są wzorami:

$$\begin{aligned} \xi_\omega(x, y, z) &= \frac{1}{g}\left(\frac{\partial W_\omega}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial W_\omega}{\partial x}(0,0,0)\right) \\ &= \frac{\omega^2}{g}[(x\sin\phi_S\cos\lambda_S + y\sin\lambda_S - z\cos\phi_S\cos\lambda_S)\sin\phi_S\cos\lambda_S \\ &\quad - (-x\sin\phi_S\sin\lambda_S + y\cos\lambda_S + z\cos\phi_S\sin\lambda_S)\sin\phi_S\sin\lambda_S] \end{aligned} \tag{3.3.3a}$$

$$\begin{aligned} \eta_\omega(x, y, z) &= \frac{1}{g}\left(\frac{\partial W_\omega}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial W_\omega}{\partial y}(0,0,0)\right) \\ &= \frac{\omega^2}{g}[(x\sin\phi_S\cos\lambda_S + y\sin\lambda_S - z\cos\phi_S\cos\lambda_S)\sin\lambda_S \\ &\quad + (-x\sin\phi_S\sin\lambda_S + y\cos\lambda_S + z\cos\phi_S\sin\lambda_S)\cos\lambda_S \end{aligned} \tag{3.3.3b}$$

3.4. Poprawka topograficzna

Masy topograficzne wokół stanowiska tachymetru powodują zakłócenie sferycznego modelu pionu.

Część potencjału siły ciężkości Ziemi (3.1.1) odnosząca się do mas topograficznych ponad powierzchnią poziomą przechodzącą przez najniżej położony punkt na obszarze kilkakrotnie większym od obszaru obejmującego pomiar tachymetryczny i GPS, w ogólności ponad geoidą, oznaczona jest w rozkładzie (3.1.5) symbolem W_t:

$$W_t(C) = G\int\frac{dm}{r} \tag{3.4.1}$$

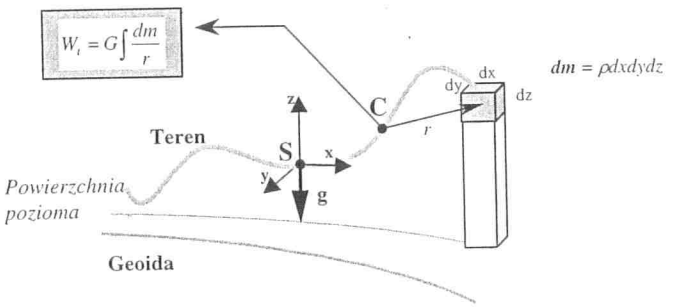
gdzie $dm = \rho dxdydz$ jest elementem masy o gęstości ρ i objętości $dxdydz$, w odległości r od punktu wyznaczenia potencjału C, w układzie odniesienia (S, x, y, z), (rys. 3.4.1).

Na podstawie (3.1.3), (3.1.7) i (3.4.1) poprawka topograficzna odchylenia pionu dana jest wzorami:

$$\xi_t = \frac{G}{g}\int\rho\left(\frac{\Delta x_{SP}}{r_{SP}^3} - \frac{\Delta x_{CP}}{r_{CP}^3}\right)dxdydz \tag{3.4.2a}$$

$$\eta_t = \frac{G}{g}\int\rho\left(\frac{\Delta y_{SP}}{r_{SP}^3} - \frac{\Delta y_{CP}}{r_{CP}^3}\right)dxdydz \tag{3.4.2b}$$

gdzie $\Delta x_{SP}, \Delta y_{SP}, r_{SP}$ i $\Delta x_{CP}, \Delta y_{CP}, r_{CP}$ są przyrostami współrzędnych i odległością od punktów S i C do bieżącego segmentu mas topograficznych P, o gęstości ρ i objętości $dxdydz$.



Rys. 3.4.1. Potencjał mas topograficznych.
Fig. 3.4.1. Topographical masses potential

Praktyczne obliczenie poprawki topograficznej (3.4.2) można zrealizować wykorzystując regularną *siatkę numerycznego modelu terenu* (NMT). Model ten dzieli masy topograficzne na prostopadłościenne bloki, wewnątrz których założymy stałą ich gęstość ρ. Wpływ pojedynczego bloku na składowe odchylenia pionu można obliczyć rozwiązując całkę (3.4.2) względem zmiennych x, y, z w granicach całkowania określonych przez współrzędne x_1, y_1, z_1 oraz x_2, y_2, z_2 ograniczające dany prostopadłościenny blok *(Nagy 1966)*. Wzory (3.4.2) przyjmą wtedy postać:

$$\xi_t = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{n}\left[V_x(i,S) - V_x(i,C)\right] \tag{3.4.3a}$$

$$\eta_t = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{n}\left[V_y(i,S) - V_y(i,C)\right] \tag{3.4.3b}$$

gdzie funkcje V_x i V_y:

$$V_x(i,j) = G\rho_i \Big\| (y_i - y_j)\ln|(z_i - z_j) + r| + (z_i - z_j)\ln|(y_i - y_j) + r| - (x_i - x_j)\arctan\left[\frac{(y_i - y_j)(z_i - z_j)}{(x_i - x_j)r}\right]\Bigg|_{x_{i1}}^{x_{i2}}\Bigg|_{y_{i1}}^{y_{i2}}\Bigg|_{z_{i1}}^{z_{i2}} \tag{3.4.4a}$$

$$V_y(i,j) = G\rho_i \Big\| (x_i - x_j)\ln|(z_i - z_j) + r| + (z_i - z_j)\ln|(x_i - x_j) + r| - (y_i - y_j)arctan\left[\frac{(x_i - x_j)(z_i - z_j)}{(y_i - y_j)r}\right]\Bigg|_{x_{i1}}^{x_{i2}}\Bigg|_{y_{i1}}^{y_{i2}}\Bigg|_{z_{i1}}^{z_{i2}} \tag{3.4.4b}$$

są pochodnymi potencjału prostopadłościennego bloku masy topograficznej w kierunkach x i y, n oznacza ilość bloków w siatce NMT, $j=S,C$ jest wskaźnikiem punktu, w którym poprawkę topograficzną wyznaczamy, $r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ oraz $|f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$.

3.5. Poprawka grawimetryczna

Z definicji przyspieszenia $g = -\frac{\partial W}{\partial H}$ – długości wektora przyspieszenia (3.1.2) i rozkładu potencjału (3.1.5) wynika, że *masy zakłócające Ziemi i jej otoczenia* (w tym atmosfera), wyrażone potencjałem zakłócającym $W_{\Delta g}$, wywołują *mierzalną* ***anomalię grawimetryczną***

$$\Delta g = -\frac{\partial W_{\Delta g}}{\partial H} \tag{3.5.1}$$

określoną równaniem

$$\Delta g = g - g_o \tag{3.5.2}$$

gdzie g jest pomierzoną wartością przyspieszenia, natomiast

$$g_o = g_r + g_\omega + g_t \tag{3.5.3}$$

jest wartością teoretyczną, obliczoną przy założeniu Ziemi kulistej:

$$g_r = -\frac{\partial W_r}{\partial H} \approx -\frac{\partial W_r}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \tag{3.5.4}$$

z poprawkami:
a) Rotacyjną

$$g_\omega = -\frac{\partial W_\omega}{\partial H} \approx -\frac{\partial W_\omega}{\partial z}$$
$$= -\omega^2[(X_S - x\sin\phi_S\cos\lambda_S - y\sin\lambda_S + z\cos\phi_S\cos\lambda_S)\cos\phi_S\cos\lambda_S \qquad (3.5.5)$$
$$+(Y_S - x\sin\phi_S\sin\lambda_S + y\cos\lambda_S + z\cos\phi_S\sin\lambda_S)\cos\phi_S\sin\lambda_S]$$

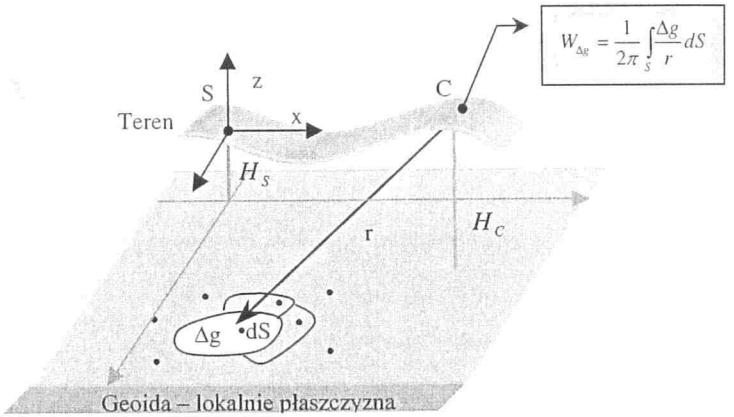
b) topograficzną $g_t = -\frac{\partial W_t}{\partial H} \approx -\frac{\partial W_t}{\partial z}$:

$$g_t = -G\int\frac{\rho\Delta z}{r^3}dxdydz \qquad (3.5.6)$$

Przy założeniu, że anomalie grawimetryczne Δg, (3.5.2) zredukowane są na geoidę – lokalnie płaszczyznę (rys. 3.5.1) potencjał zakłócający dany jest wzorem Stokesa, patrz np. Krzyżański (1957) – rozwiązanie zadania wartości brzegowej Neumanna:

$$W_{\Delta g} = \frac{1}{2\pi}\int_S\frac{\Delta g}{r}dS \qquad (3.5.7)$$

gdzie Δg jest anomalią grawimetryczną wewnątrz elementu powierzchniowego dS w odległości r od punktu wyznaczenia potencjału C.



Rys. 3.5.1. Potencjał zakłócający Ziemi – wzór Stokesa
Fig. 3.5.1. Disturbing potential of the Earth – Stokes equation

Na podstawie (3.1.3), (3.1.7) i (3.5.7) poprawka grawimetryczna odchylenia pionu dana jest wzorami:

$$\xi_{\Delta g} = \frac{1}{2\pi g}\int\Delta g\left(\frac{\Delta x_{SP}}{r_{SP}^3} - \frac{\Delta x_{CP}}{r_{CP}^3}\right)dS \qquad (3.5.8a)$$

$$\eta_{\Delta g} = \frac{1}{2\pi g}\int\Delta g\left(\frac{\Delta y_{SP}}{r_{SP}^3} - \frac{\Delta y_{CP}}{r_{CP}^3}\right)dS \qquad (3.5.8b)$$

gdzie $r_{SP} = \sqrt{\Delta x_{SP}^2 + \Delta y_{SP}^2 + H_S^2}$, $r_{CP} = \sqrt{\Delta x_{CP}^2 + \Delta y_{CP}^2 + H_C^2}$ oraz $\Delta x_{SP} = x_P - x_S$, $\Delta y_{SP} = y_P - y_S$, $\Delta x_{CP} = x_P - x_C$, $\Delta y_{CP} = y_P - y_C$.

Obliczenie poprawki grawimetrycznej (3.5.8) można przeprowadzić tworząc *numeryczny model anomalii* w postaci regularnej siatki kwadratów o stałej wartości anomalii Δg wewnątrz każdego jej oczka. Wpływ pojedynczego oczka siatki na składowe odchylenia pionu można obliczyć rozwiązując całkę równania (3.5.8) względem zmiennych x, y w granicach całkowania określonych przez współrzędne x_1, y_1 oraz x_2, y_2 ograniczające dany kwadrat oczka siatki.

Wzory (3.5.8) przyjmą postać:

$$\xi_{\Delta g} = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{n}\left[V_{\Delta gx}(i,S) - V_{\Delta gx}(i,C)\right] \qquad (3.5.9a)$$

$$\eta_{\Delta g} = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{n}\left[V_{\Delta gy}(i,S) - V_{\Delta gy}(i,C)\right] \qquad (3.5.9b)$$

gdzie funkcje $V_{\Delta gx}$ i $V_{\Delta gy}$:

$$V_{\Delta gx}(i,j) = \frac{\Delta g_i}{2\pi}\left\|\ln|(y_i - y_j) + r\right|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2} \qquad (3.5.10a)$$

$$V_{\Delta gy}(i,j) = \frac{\Delta g_i}{2\pi}\left\|\ln|(x_i - x_j) + r\right|_{x_1}^{x_2}\Big|_{y_1}^{y_2} \qquad (3.5.10b)$$

są pochodnymi potencjału wyznaczonego na podstawie jednego oczka siatki numerycznego modelu anomalii grawimetrycznych w kierunkach x i y, n oznacza ilość oczek siatki, $j=S,C$ jest wskaźnikiem punktu, w którym poprawkę topograficzną wyznaczamy, $r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ oraz $|f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$.

3.6. Równania obserwacyjne

Równania poprawek obserwacji geodezyjnych mają w ogólności postać:

$$y + \varepsilon = f(\mathbf{X}), \quad \varepsilon \sim (0, \sigma_y^2) \tag{3.6.1}$$

gdzie: ε jest poprawką wyniku pomiaru y ze względu na jego błąd średni σ_y, f określa zależność funkcyjną mierzonej wielkości y i wektora wyznaczanych parametrów $\mathbf{X}$.

Po linearyzacji funkcji f równanie (3.6.1) przyjmie postać :

$$y + \varepsilon = f(\mathbf{X}_o) + grad_{\mathbf{x}}(f)\mathbf{dx}, \quad \varepsilon \sim (0, \sigma_y^2) \tag{3.6.2}$$

lub

$$y + \varepsilon = y_o + \mathbf{a}_y \mathbf{dx} = y_o + dy, \quad \varepsilon \sim (0, \sigma_y^2) \tag{3.6.3}$$

gdzie $f(\mathbf{X}_o) = y_o$ jest przybliżoną wartością obserwacji, $\mathbf{dx} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_o$ jest wektorem wyznaczanych poprawek do przybliżonych wartości parametrów $\mathbf{X}_o$ oraz $grad_{\mathbf{x}}(f) = \mathbf{a}_y$ tworzy macierz *planu obserwacji*, iloczyn $\mathbf{a}_y\mathbf{dx}$ jest różniczkową zmianą mierzonej wielkości y_o.

Dla danych tachymetrycznych s-odległości przestrzennej, α-pomierzonego kierunku oraz β-kąta zenitalnego, różniczki dy mają postać:

$$ds = \frac{\Delta x}{s}(dx_P - dx_C) + \frac{\Delta y}{s}(dy_P - dy_C) + \frac{\Delta z}{s}(dz_P - dz_C) \tag{3.6.4a}$$

$$\begin{aligned} d\alpha = &-\frac{\Delta y}{d^2}(dx_P - dx_C) + \frac{\Delta x}{d^2}(dy_P - dy_C) \\ &- d\xi \operatorname{ctg}\beta \sin\alpha + d\eta \operatorname{ctg}\beta \cos\alpha + d\vartheta \end{aligned} \tag{3.6.4b}$$

$$\begin{aligned} d\beta = &-\frac{\Delta x \Delta z}{s^2 d}(dx_P - dx_C) + \frac{\Delta y \Delta z}{s^2 d}(dy_P - dy_C) - \frac{d}{s^2}(dz_P - dz_C) \\ &+ d\xi \cos\alpha + d\eta \sin\alpha \end{aligned} \tag{3.6.4c}$$

oraz przybliżone wartości obserwacji

$$s(\mathbf{x}_o) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$tan\alpha(\mathbf{x}_o) = \frac{-\Delta x \sin\nu + \Delta y \cos\nu + \Delta z(\xi_o \sin\nu - \eta_o \cos\nu)}{\Delta x \cos\nu + \Delta y \sin\nu - \Delta z(\xi_o \cos\nu - \eta_o \sin\nu)}$$

$$\cos\beta(\mathbf{x}_o) = \frac{\Delta x \xi_o + \Delta y \eta_o + \Delta z}{s_o}$$

W powyższych wzorach przyjęto $d = s \sin\beta$ oraz $d\vartheta$ jest stałą orientacyjną. Wielkości dx, dy, dz są poprawkami przybliżonych współrzędnych punktów $dx = x - x_o$, $dy = y - y_o$, $dz = z - z_o$.

Możliwe są trzy interpretacje składowych poprawki $\mathbf{dx} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o$:

a) $dx, dy, dz, d\xi, d\eta, d\vartheta$ są elementami $\mathbf{dx}$,

b) wielkości $d\xi, d\eta$ można zgodnie z (3.1.9) zastąpić pochodnymi potencjału T, otrzymamy wówczas jako elementy $\mathbf{dx}$ wielkości $dx, dy, dz, d\vartheta, a_1, a_2 \ldots$.

c) zakładając $d\xi = 0, d\eta = 0$ elementami $\mathbf{dx}$ będą $dx, dy, dz, d\vartheta$.

4. POMIARY SATELITARNE GPS

Zaobserwowane przyrosty współrzędnych w układzie równikowym GPS $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, powiązane są z lokalnym układem odniesienia (S, x, y, z) zależnością (rys. 2.1):

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{R}'\mathbf{t}' \quad \Leftrightarrow \tag{4.1}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\nu_S \sin\phi_S \cos\lambda_S - \sin\nu_S \sin\lambda_S & -\cos\nu_S \sin\phi_S \sin\lambda_S + \sin\nu_S \cos\lambda_S & \cos\nu_S \cos\phi_S \\ \sin\nu_S \sin\phi_S \cos\lambda_S - \cos\nu_S \sin\lambda_S & \sin\nu_S \sin\phi_S \sin\lambda_S + \cos\nu_S \cos\lambda_S & -\sin\nu_S \cos\phi_S \\ \cos\phi_S \cos\lambda_S & \cos\phi_S \sin\lambda_S & \sin\phi_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

gdzie ϕ_S i λ_S są kątami kierunkowymi pionowej osi z oraz ν_s jest kątem kierunkowym osi x w płaszczyźnie poziomej x, S, y liczonym od kierunku północy.

Macierz obrotu R' można wyznaczyć rozwiązując układ równań (4.1) zestawionych dla kilku wektorów łączących punkty sieci, o znanych współrzędnych w układzie lokalnym $(\Delta\mathbf{r})$ i GPS $(\mathbf{t}')$.

Równanie (4.1) pozwala na wyznaczenie różniczek $d\Delta X, d\Delta Y, d\Delta Z$ przyrostów współrzędnych GPS w postaci:

$$\begin{bmatrix} d\Delta X \\ d\Delta Y \\ d\Delta Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}'^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} dx_L - dx_K \\ dy_L - dy_K \\ dz_L - dz_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta Z \cos\lambda_S d\phi_S - \Delta Y d\lambda_S + (\Delta Y \sin\phi_S - \Delta Z \cos\phi_S \sin\lambda_S) d\nu_S) \\ -\Delta Z \sin\lambda_S d\phi_S + \Delta X d\lambda_S - (\Delta X \sin\phi_S - \Delta Z \cos\phi_S \cos\lambda_S) d\nu_S \\ (\Delta X \cos\lambda_S + \Delta Y \sin\lambda_S) d\phi_S + \cos\phi_S (\Delta X \sin\lambda_S - \Delta Y \cos\lambda_S) d\nu_S \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

oraz ich wartości przybliżonych:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_o \\ \Delta Y_o \\ \Delta Z_o \end{bmatrix} = \mathbf{R}'^T \begin{bmatrix} x_L - x_K \\ y_L - y_K \\ z_L - z_K \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Równania obserwacyjne (3.6.3) dla danych GPS, przy wyżej określonych wartościach różniczek $d\Delta X, d\Delta Y, d\Delta Z$ i obserwacji przybliżonych $\Delta X_o, \Delta Y_o, \Delta Z_o$, będą zdefiniowane następująco:

$$y + \varepsilon = y_o + dy \tag{4.4}$$

5. NIWELACJA

5.1. Przyrost potencjału

Z rozkładu potencjału $W = W_r + W_\omega + W_t + W_{\Delta g} + T$ wynika, że *potencjał zakłócający* T wywołuje *mierzalną* ***anomalię przyrostu potencjału*** na ciągu niwelacyjnym pomiędzy punktami P i Q:

$$\Delta W - \Delta W_o = T(Q) - T(P) \tag{5.1.1}$$

gdzie ΔW jest pomierzoną wartością przyrostu potencjału, natomiast

$$\Delta W_o = \Delta W_r + \Delta W_\omega + \Delta W_t + \Delta W_{\Delta g} \tag{5.1.2}$$

jest wartością teoretyczną obliczoną przy założeniu Ziemi kulistej

$$\Delta W_r = W_r(Q) - W_r(P) \tag{5.1.3}$$

z poprawkami: rotacyjną Ziemi

$$\Delta W_\omega = W_\omega(Q) - W_\omega(P) \tag{5.1.4}$$

oraz topograficzną

$$\Delta W_t = W_t(Q) - W_t(P) \tag{5.1.5}$$

i grawimetryczną

$$\Delta W_{\Delta g} = W_{\Delta g}(Q) - W_{\Delta g}(P) \tag{5.1.6}$$

5.2. Model kulisty

Przyrost potencjału jednorodnej Ziemi kulistej pomiędzy punktami P,Q (5.1.3) dany jest na podstawie (3.2.1) wzorem:

$$\Delta W_r = GM\left(\frac{1}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2 + (R + H_S + z_Q)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + (R + H_S + z_P)^2}}\right) \tag{5.2.1}$$

gdzie stała GM może być obliczona na podstawie zależności $GM = g_r(R+H)^2$ w jednym z punktów grawimetrycznych: $g_r \cong g - g_t$, g – pomierzone, g_t – obliczona poprawka topograficzna, H – wysokość punktu grawimetrycznego, R – założony promień kuli, zwykle $R = 6371\,\mathrm{km}$.

5.3. Poprawka rotacyjna

Na podstawie (3.3.2) poprawka rotacyjna przyrostu potencjału pomiędzy punktami P,Q (5.1.4) dana jest wzorami:

$$\begin{aligned} \Delta W_\omega = \frac{\omega^2}{2}[\ & (X_S - x_Q \sin\phi\cos\lambda - y_Q \sin\lambda + z_Q \cos\phi\cos\lambda)^2 \\ & - (X_S - x_P \sin\phi\cos\lambda - y_P \sin\lambda + z_P \cos\phi\cos\lambda)^2 \\ & + (Y_S - x_Q \sin\phi\sin\lambda + y_Q \cos\lambda + z_Q \cos\phi\sin\lambda)^2 \\ & - (Y_S - x_P \sin\phi\sin\lambda + y_P \cos\lambda + z_P \cos\phi\sin\lambda)^2] \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

5.4. Poprawka topograficzna

Na podstawie (5.1.5) i (3.4.1) poprawka topograficzna przyrostu potencjału pomiędzy punktami P,Q dana jest wzorem:

$$\Delta W_t = G\int \rho\left(\frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r_P}\right)dxdydz \tag{5.4.1}$$

gdzie r_Q, r_P są odległościami, odpowiednio od punktów Q,P do bieżącego przestrzennego segmentu mas topograficznych, o gęstości ρ i objętości $dxdydz$.

W obliczeniu poprawki topograficznej (5.4.1) można zastosować (podobnie jak w obliczeniach poprawki topograficznej dla odchyleń pionu) regularną *siatkę numerycznego modelu terenu*, która dzieli masy topograficzne na prostopadłościenne bloki o stałej gęstości ρ. Wpływ takiego, pojedynczego bloku na potencjał grawitacyjny można obliczyć rozwiązując całkę równania (5.4.1) względem zmiennych x, y, z w granicach całkowania

określonych przez współrzędne x_1, y_1, z_1 oraz x_2, y_2, z_2, które ograniczają dany prostopadłościenny blok. Wzór (5.4.1) przyjmie postać (*Forsberg 1997*):

$$W_t = \sum_{i=1}^{n} \left[V(i,S) - V(i,C) \right] \tag{5.4.2}$$

gdzie funkcja V:

$$\begin{aligned} V(i,j) = G\rho_i \Big\| & (x_i - x_j)(y_i - y_j)\ln|(z_i - z_j) + r| + (y_i - y_j)(z_i - z_j)\ln|(x_i - x_j) + r| \\ & + (x_i - x_j)(z_i - z_j)\ln|(y_i - y_j) + r| - \frac{1}{2}(x_i - x_j)^2 arctan\left[\frac{(y_i - y_j)(z_i - z_j)}{(x_i - x_j)r}\right] \\ & - \frac{1}{2}(y_i - y_j)^2 arctan\left[\frac{(x_i - x_j)(z_i - z_j)}{(y_i - y_j)r}\right] - \frac{1}{2}(z_i - z_j)^2 arctan\left[\frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{(z_i - z_j)r}\right] \Bigg|_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Bigg|_{y_{i1}}^{y_{i2}} \Bigg|_{z_{i1}}^{z_{i2}} \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

jest potencjałem prostopadłościennego bloku masy topograficznej, n oznacza ilość bloków w siatce NMT, $j=S,C$ jest wskaźnikiem punktu, w którym poprawkę topograficzną wyznaczamy, $r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ oraz $|f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$.

5.5. Poprawka grawimetryczna

Na podstawie (5.1.6) i (3.5.7) poprawka grawimetryczna przyrostu potencjału pomiędzy punktami P,Q dana jest wzorem:

$$\Delta W_{\Delta g} = \frac{1}{2\pi} \int_S \Delta g \left(\frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r_P} \right) dS \tag{5.5.1}$$

gdzie r_P, r_Q są odległościami, odpowiednio od punktów P,Q do bieżącego powierzchniowego segmentu anomalii grawimetrycznej o wielkości Δg i powierzchni dS.

Obliczenie poprawki grawimetrycznej (5.5.1) można przeprowadzić korzystając z *numerycznego modelu anomalii* w postaci regularnej siatki kwadratów o stałej wartości anomalii Δg wewnątrz każdego jej oczka. Wpływ pojedynczego oczka siatki na różnicę potencjałów w punktach P i Q można obliczyć rozwiązując całkę równania (5.5.1) względem zmiennych x, y w granicach całkowania określonych przez współrzędne x_1, y_1 oraz x_2, y_2 ograniczające dany kwadrat oczka siatki.

Wzór (5.5.1) przyjmie postać:

$$\Delta V_{\Delta g} = \sum_{i=1}^{n} \left[V_{\Delta g}(i,S) - V_{\Delta g}(i,C) \right] \tag{5.5.2}$$

gdzie funkcja $V_{\Delta g}$:

$$\begin{aligned} V_{\Delta g}(i,j) = \frac{\Delta g_i}{2\pi} \Big\| & (x_i - x_j)\ln|(y_i - y_j) + r| + (y_i - y_j)\ln|(x_i - x_j) + r| \\ & - (z_i - z_j) arctan\left[\frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{(z_i - z_j)r}\right] \Bigg|_{x_{i1}}^{x_{i2}} \Bigg|_{y_{i1}}^{y_{i2}} \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

jest wartością poprawki grawimetrycznej potencjału wyznaczoną na podstawie jednego oczka siatki numerycznego modelu anomalii grawimetrycznych, n oznacza ilość oczek siatki, $j=S,C$ jest wskaźnikiem punktu, w którym poprawkę topograficzną wyznaczamy, $r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ oraz $|f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$.

5.6. Równania obserwacyjne

Liniowe równanie obserwacyjne zaobserwowanej wartości przyrostu potencjału $\Delta W \pm \sigma_{\Delta W}$ na ciągu niwelacyjnym pomiędzy punktami P,Q, otrzymuje się na podstawie zależności (3.6.3), (3.1.5) i (3.1.6):

$$\Delta W + \varepsilon_{\Delta W} = \Delta W_o + [\mathbf{F}(Q) - \mathbf{F}(P)]\mathbf{a} + d\Delta W, \ \sigma_{\Delta W} \tag{5.6.1}$$

gdzie wartość przybliżona ΔW_o dana jest wzorem (5.1.2).

Różniczka $d\Delta W$ wynika ze zmiany, w procesie wyrównania, współrzędnych punktów P i Q. Możemy ją określić jako:

$$d\Delta W = dW_Q - dW_P \tag{5.6.2}$$

gdzie:

$$dW_Q = \frac{\partial W(Q)}{\partial x} dx_Q + \frac{\partial W(Q)}{\partial y} dy_Q + \frac{\partial W(Q)}{\partial z} dz_Q \tag{5.6.3a}$$

$$dW_P = \frac{\partial W(P)}{\partial x} dx_P + \frac{\partial W(P)}{\partial y} dy_P + \frac{\partial W(P)}{\partial z} dz_P \tag{5.6.3b}$$

Zapisując składowe gradientu potencjału W w punktach P i Q jako $g_{xQ}, g_{yQ}, g_{zQ}, g_{xP}, g_{yP}, g_{zP}$ oraz przyjmując ogólnie $g_z \approx g$, równanie obserwacyjne (5.6.1) przyjmie postać:

$$\Delta W + \varepsilon_{\Delta W} = \Delta W_o + g_{xQ}dx_Q - g_{xP}dx_P + g_{yQ}dy_Q - g_{yP}dy_P + g_Q dz_Q - g_P dz_P + \tag{5.6.4}$$

$$+[\mathbf{F}(Q) - \mathbf{F}(P)]\mathbf{a},\ \sigma_{\Delta W}$$

Zakładając, że płaszczyzna xy jest styczna do powierzchni ekwipotencjalnej w punkcie S, składniki $g_{xQ}dx_Q, g_{yQ}dy_Q, g_{xP}dx_P, g_{yP}dy_P$ można uznać za nieistotne (dla małego obszaru). W innym wypadku składowe $g_{xQ}, g_{yQ}, g_{xP}, g_{yP}$ można przyjąć jako składowe przyspieszenia Ziemi kulistej z ewentualną poprawką rotacyjną lub mając pomierzone wartości przyspieszenia, obliczyć korzystając z wyznaczonych składowych odchyleń pionu.

6. POMIARY GRAWIMETRYCZNE

6.1. Przyspieszenie siły ciężkości

Z definicji przyspieszenia $g = \dfrac{\partial W}{\partial H}$ – długości wektora przyspieszenia (3.1.2) i rozkładu potencjału (3.1.5), wynika, że *potencjał zakłócający Ziemi* T wywołuje *mierzalną* ***anomalię grawimetryczną***

$$g - g_o = \frac{\partial T}{\partial H} \tag{6.1.1}$$

gdzie g jest pomierzoną wartością przyspieszenia, natomiast

$$g_o = g_r + g_\omega + g_t + g_{\Delta g} \tag{6.1.2}$$

jest wartością teoretyczną obliczoną przy założeniu przyspieszenia g_r – Ziemi kulistej (3.5.4) z poprawkami: rotacyjną Ziemi g_ω (3.5.5), topograficzną g_t (3.5.6) i grawimetryczną $g_{\Delta g}$:

$$g_{\Delta g} = \frac{\partial W_{\Delta g}}{\partial H} \approx \frac{\partial W_{\Delta g}}{\partial z} \tag{6.1.3}$$

skąd, w wyniku różniczkowania potencjału (3.5.7):

$$g_{\Delta g} = \frac{H}{2\pi}\int_S \frac{\Delta g}{r^3}\,dS \tag{6.1.4}$$

Poprawki: rotacyjną, topograficzną i grawimetryczną można obliczyć w sposób analogiczny jak dla pomiarów tachymetrycznych i niwelacyjnych.

6.2. Równania obserwacyjne

Liniowe równanie obserwacyjne typu (3.6.3) dla przyspieszenia siły ciężkości można zapisać w postaci:

$$g + \varepsilon_g = g_o + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\mathbf{a} + dg \tag{6.2.1}$$

gdzie g_o określone jest wzorem (6.1.2) oraz $dg = \dfrac{\partial g}{\partial x}dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}dy + \dfrac{\partial g}{\partial z}dz$.

Zakładając $\dfrac{\partial g}{\partial x} \approx W_{zx}, \dfrac{\partial g}{\partial y} \approx W_{zy}, \dfrac{\partial g}{\partial z} \approx W_{zz}$, możemy obliczyć przybliżone wartości tych składowych gradientu przyspieszenia siły ciężkości. Równanie obserwacyjne przyjmie więc postać:

$$g + \varepsilon_g = g_o + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\mathbf{a} + W_{ozx}dx + W_{ozy}dy + W_{ozz}dz \tag{6.2.2}$$

7. POMIARY GRADIOMETRYCZNE

7.1. Gradient przyspieszenia siły ciężkości

Różniczkując wektor przyspieszenia siły ciężkości (3.1.2) względem zmiennych x, y, z otrzymamy macierz gradientu przyspieszenia:

$$grad\,\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_x}{\partial x} & \dfrac{\partial g_x}{\partial y} & \dfrac{\partial g_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_y}{\partial x} & \dfrac{\partial g_y}{\partial y} & \dfrac{\partial g_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_z}{\partial x} & \dfrac{\partial g_z}{\partial y} & \dfrac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{zz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \tag{7.1.1}$$

Z rozkładu potencjału (3.1.5) $W = W_r + W_\omega + W_H + W_{\Delta g} + T$ wynika, że potencjał zakłócający Ziemi T wywołuje mierzalną ***anomalię gradientu przyspieszenia***

$$grad\mathbf{g} - grad\mathbf{g}_o = grad\frac{\partial T}{\partial H} \tag{7.1.2}$$

gdzie $grad\mathbf{g}$ jest pomierzoną wartością gradientu przyspieszenia, natomiast

$$grad\mathbf{g}_o = \begin{bmatrix} W_{oxx} & W_{oxy} & W_{oxz} \\ W_{oyx} & W_{oyy} & W_{oyz} \\ W_{ozx} & W_{ozy} & W_{ozz} \end{bmatrix} = grad\mathbf{g}_r + grad\mathbf{g}_\omega + grad\mathbf{g}_t + grad\mathbf{g}_{\Delta g} \tag{7.1.3}$$

jest wartością teoretyczną obliczoną przy założeniu Ziemi kulistej z poprawkami:
- rotacyjną Ziemi,
- topograficzną,
- grawimetryczną,

Poprawki te można wyznaczyć analogicznie jak dla pozostałych typów obserwacji.

7.2. Równania obserwacyjne

Liniowe równanie obserwacyjne składowych gradientu przyspieszenia siły ciężkości typu (3.6.3), można zapisać ogólnie w postaci:

$$W_{xz} + \varepsilon_{Wxz} = W_{oxz} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial xz}\mathbf{a} + dW_{xz} \tag{7.2.1a}$$

$$W_{yz} + \varepsilon_{yz} = W_{oyz} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial yz}\mathbf{a} + dW_{yz} \tag{7.2.1b}$$

$$W_{xy} + \varepsilon_{Wxy} = W_{oxy} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial xy}\mathbf{a} + dW_{xy} \tag{7.2.1c}$$

$$W_{xx} + \varepsilon_{Wxx} = W_{oxx} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial xx}\mathbf{a} + dW_{xx} \tag{7.2.1d}$$

$$W_{yy} + \varepsilon_{Wyy} = W_{oyy} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial yy}\mathbf{a} + dW_{yy} \tag{7.2.1e}$$

$$W_{zz} + \varepsilon_{Wzz} = W_{ozz} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial zz}\mathbf{a} + dW_{zz} \tag{7.2.1f}$$

gdzie $grad\mathbf{g}_o$ określony jest wzorem (7.1.3).

Różniczkowe zmiany składowych gradientu przy zmianie współrzędnych punktu o 1 m., nie powinny przekraczać 10^{-11} 1/s^2 (wartość obliczona dla kuli o promieniu R = 6371 km), co przy dokładności pomiaru rzędu 10^{-9} 1/s^2 pozwala na ich pominięcie w równaniach obserwacyjnych. Ostatecznie więc równania (7.2.1) zapiszemy w postaci:

$$W_{xz} + \varepsilon_{Wxz} = W_{oxz} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial xz}\mathbf{a} \tag{7.2.2a}$$

$$W_{yz} + \varepsilon_{yz} = W_{oyz} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial yz}\mathbf{a} \tag{7.2.2b}$$

$$W_{xy} + \varepsilon_{Wxy} = W_{oxy} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial xy}\mathbf{a} \tag{7.2.2c}$$

$$W_{xx} + \varepsilon_{Wxx} = W_{oxx} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial xx}\mathbf{a} \tag{7.2.2d}$$

$$W_{yy} + \varepsilon_{Wyy} = W_{oyy} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial yy}\mathbf{a} \tag{7.2.2e}$$

$$W_{zz} + \varepsilon_{Wzz} = W_{ozz} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial zz}\mathbf{a} \tag{7.2.2f}$$

Do równań tych należy dodać równanie warunkowe Lapalace'a:

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 2\omega^2 \tag{7.2.3}$$

które dla równań (7.2.2) zapiszemy w postaci:

$$W_{oxx} + W_{oyy} + W_{ozz} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial xx} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial yy} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial zz}\right)\mathbf{a} = 2\omega^2 \tag{7.2.4}$$

Dla uzyskania zerowej wartości poprawki, równanie to należy wprowadzić do układu obserwacyjnego nadając mu dużą wagę.

8. WYRÓWNANIE SIECI

Opisane w poprzednim rozdziale liniowe równania obserwacyjne, o postaci (3.6.3), zestawiane są w układ:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_o)\ ,\ \boldsymbol{\varepsilon} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{C}_y) \tag{8.1}$$

gdzie: $\boldsymbol{\varepsilon}$ – poprawka wyniku pomiaru $\mathbf{y}$ ze względu na jego błąd $\mathbf{C}_y$, $(\mathbf{y} - \mathbf{y}_o)$ – różnica obserwacji i jej wartości przybliżonej; $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ – różnica wektora wyznaczanych

parametrów i jego wartości przybliżonej; **A** – macierz planu obserwacji. Wektor wyznaczanych parametrów **x** zawiera: współrzędne x, y, z wszystkich punktów, azymuty zera podziału limbusa $d\vartheta$, poprawki do kątów orientacji sieci $d\varphi, d\lambda, d\nu$ oraz elementy wektora parametrów potencjału **a**.

Rozwiązaniem układu obserwacyjnego (8.1) ***metodą najmniejszych kwadratów*** (patrz np. Baran (1983)) $\varepsilon^T P\varepsilon = min$, gdzie $P = C_y^{-1}$ – macierz wagowa $\varepsilon \sim (0, C_y)$, jest wektor parametrów $x = x_o + C_x A^T P(y - y_o)$, gdzie $C_x = (A^T PA)^{-1}$ jest błędem **x**. Wektor wyrównanych obserwacji $y + \varepsilon$ posiada błąd $C_{y+\varepsilon} = AC_x A^T$, natomiast poprawka ε błąd $C_\varepsilon = C_y - C_{y+\varepsilon}$.

Ocena jakości sieci oparta jest na analizie wielkości poprawek obserwacji. Wyniki wyrównania można uznać za dobre, jeżeli wektor poprawek obserwacji ε o wartości oczekiwanej $E\varepsilon = \mathbf{0}$ i macierzy kowariancji $\mathbf{C}_\varepsilon$ zawiera się wewnątrz elipsoidy ufności $\varepsilon^T \mathbf{C}_\varepsilon^{-1} \varepsilon = k^2 n$ – będącej k-krotnością (zwykle $k = 1,2,3$) elipsoidy oczekiwanego wystąpienia wektora dopasowania $\varepsilon^T \mathbf{C}_\varepsilon^{-1} \varepsilon = n$. Składowa $\varepsilon \sim (0, \sigma_\varepsilon^2)$ wektora $\varepsilon \sim (\mathbf{0}, \mathbf{C}_\varepsilon)$, gdzie σ_ε^2 jest odpowiadającym elementem głównej przekątnej macierzy $\mathbf{C}_\varepsilon$, nie powinna przekraczać k-krotnej wartości odchylenia standardowego $|\varepsilon| \le k\sigma_\varepsilon$. Przy założeniu rozkładu normalnego $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C}_\varepsilon)$ zachodzi $\varepsilon^T \mathbf{C}_\varepsilon^{-1} \varepsilon = \chi_n^2$, $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ oraz zmienna losowa $u = \dfrac{\varepsilon - 0}{\sigma_\varepsilon} \sim N(0,1)$, więc $\varepsilon^T \mathbf{C}_\varepsilon^{-1} \varepsilon = \chi_{n,1-\alpha}^2$ jest elipsoidą ufności wektora ε oraz $|\varepsilon| \le u_{1-\alpha/2}\sigma_\varepsilon$ jest przedziałem ufności składowej ε na zadanym poziomie ufności $1 - \alpha$, przy czym $u_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rozkładu normalnego.

Negatywny wynik oceny sieci może wynikać ze zbyt odległego przybliżenia $\mathbf{x}_o$ od **x**, niepoprawnie oszacowanej macierzy błędu obserwacji $\mathbf{C}_y$ lub błędów grubych obserwacji, lub niepoprawnie przyjętego modelu funkcjonalnego sieci (np. niepoprawny model parametryczny refrakcji). W pierwszym przypadku wystarczy przeprowadzić kilka iteracji, przyjmując **x** za $\mathbf{x}_o$. W przypadku błędów grubych obserwacji wpływ obserwacji odstającej na wyniki obliczeń można zmniejszyć poprzez przyjęcie poprawionej obserwacji odstającej $y - \varepsilon$ za obserwację, lub poprzez wprowadzenie poprawki ε w miejsce odchylenia standardowego obserwacji odstającej w macierzy $\mathbf{C}_y$, i powtórzenie obliczeń. Jest to najprostsze z podejść wyrównania odpornego.

Wzory dla wprowadzenia dodatkowych obserwacji i wyrównania sieci w czasie rzeczywistym wyprowadzone są w pracy Osady i Trojanowicza (*1999*).

9. PIŚMIENNICTWO

Baran W. (1983). Teoretyczne podstawy opracowania wyników pomiarów geodezyjnych. *PWN, Warszawa.*

Brovar W.W. (1983). Gravity field in problems of engineering geodesy. *Science, Moscow.*

Forsberg, Tscherning C. (1997). Topographic effects in gravity field modelling for BVP. Geodetic Boundary Value Problems in view of the one centimetre geoid. *Lecture notes in earth science, Springer.*

Krzyżański M. (1957). Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. *PWN, Warszawa.*

Nagy D. (1966). The gravitational attraction of right angular prism. *Geophysics 31, 362-371.*

Osada E. (1989). Metody opracowania zintegrowanych sieci geodezyjnych. *ZN AR Wrocław, Rozprawy, Nr 77.*

Osada E. (1998). Analiza, wyrównanie i modelowanie geo-danych. *Wydawnictwo AR Wrocław.*

Osada E., Trojanowicz M., (1996). Height and gravity models in GPS network. *Geodezja i Kartografia t. XLV, z. 3–4, 135–146.*

Osada E. Trojanowicz M. (1999). Joint total-station and GPS positioning with the use of digital terrain and gravity models. *Geodezja i Kartografia 1998.*

Osada E., Trojanowicz M., Małańczuk J. (1997). Koncepcja zintegrowanej sieci geodezyjnej: projekt, wyrównanie i aktualizacja. *ZN AR Wrocław. Geodezja, XIV, 324.*

A METHOD OF INTEGRATION OF THE CLASSICAL GEODETIC AND GPS DATA

Summary

In the dissertation a method of classical geodetic and GPS data adjustment is proposed. Let's note that the results of classical geodetic observations like horizontal directions, vertical angels, levelling data, gravity and gravity gradient depends on gravity potential. According to this, spatial accuracy of the joined classical geodetic and GPS positioning depends on gravity potential model which is used to adjustment process. In the dissertation a synthetic gravity potential model is proposed. The spherical model is corrected including influences of earth rotation, topographical masses above geoid and irregular distribution of density within the Earth. Last two extended components can be computed from digital terrain model and gravity data. The residual field of the gravity potential, based on spherical polynomials expansion, is determined in the adjustment process. There are given observational equations, which are based on this extended gravity potential model, for all geodetic data.

KEY WORDS: spatial geodetic networks, local gravity field, control measurements